

अनुक्रमांक

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 15

नाम _____

131

324(YX)

2020

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Instruction : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- नोट :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
 - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए।
 - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

324(YX)

(Y-1)

P.T.O.

- Note :**
- There are total _____ in this question paper.
 - All questions are compulsory.
 - In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
 - Marks allotted to the questions are indicated against the question.
 - Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
 - Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1

- एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं
- एकैकी तथा आच्छादक
- बहुएक परन्तु आच्छादक नहीं
- बहुएक तथा आच्छादक

(ख) पूर्णाकों के समुच्चय Z पर सम्बन्ध R जो $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$ द्वारा दिया गया है। तब R 1

- स्वतुल्य तथा संक्रामक
- स्वतुल्य तथा सममित
- सममित तथा संक्रामक
- एक तुल्यता सम्बन्ध

324(YX)

2

(Y-1)

(ग) $\int x \sec(x^2) dx$ का मान है 1

(i) $\frac{x^2}{2} \log(\sec x^2 + \tan x^2) + C$

(ii) $2 \log(\sec x^2 + \tan x^2) + C$

(iii) $\frac{1}{2} \log(\sec x^2 + \tan x^2) + C$

(iv) उपरोक्त में से कोई नहीं

(घ) अवकल समीकरण 1

$x \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y^2 = 0$ की घात है

(i) 1

(ii) 2

(iii) 3

(iv) उपरोक्त में से कोई नहीं

(ङ) यदि बिन्दु A (m, -1), B (2, 1) तथा C (4, 5) सररेखीय हो तो m का मान होगा 1

(i) 2

(ii) 1

(iii) 0

(iv) 3

1. Attempt all the parts of the following :

(a) If the function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by 1

$f(x) = x^3$ is :

(i) one-one but not onto

(ii) one-one onto

(iii) many-one but not onto

(iv) many-one onto

(b) R is a relation on the set Z of integers and is given by

$(x, y) \in R \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$ then R is 1

(i) reflexive and transitive

(ii) reflexive and symmetric

(iii) symmetric and transitive

(iv) an equivalence relation

(c) $\int x \sec(x^2) dx$ is equal to 1

(i) $\frac{x^2}{2} \log(\sec x^2 + \tan x^2) + C$

(ii) $2 \log(\sec x^2 + \tan x^2) + C$

(iii) $\frac{1}{2} \log(\sec x^2 + \tan x^2) + C$

(iv) none of these

(d) The degree of differential equation 1

$$x \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) + \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + y^2 = 0 \text{ is}$$

- (i) 1
(ii) 2
(iii) 3
(iv) None of these

(e) If the points A (m, -1), B (2, 1), C (4, 5) are collinear then value of m is 1

- (i) 2 (ii) 1
(iii) 0 (iv) 3

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) $\operatorname{cosec}^{-1} \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} \right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। 1

(ख) अगर फलन

$$f(x) = \frac{\sin(10x)}{x}, x \neq 0, x = 0 \text{ पर सतत है तो}$$

$f(0)$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

(ग) अवकल समीकरण

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1 \text{ का समाकलन गुणक (I.F.) है 1}$$

- (i) $\sin x$
(ii) $\sec x$
(iii) $\tan x$
(iv) $\cos x$

(घ) असमिका $3x - 5 \leq 5x - 3$ जहाँ x एक वास्तविक संख्या है, को हल कीजिए। 1

(ङ) A तथा B दो घटनाएँ हैं कि $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$ तब निम्न से घटनाओं के बारे में सही चयन कीजिए : 1

- (i) $A \subset B$
(ii) $A = B$
(iii) $A \cap B = \phi$
(iv) $P(A) = P(B)$

2. Attempt all the parts of the following :

(a) Find principal value of $\operatorname{cosec}^{-1} \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} \right)$ 1

(b) If the function

$$f(x) = \frac{\sin(10x)}{x}, x \neq 0 \text{ is continuous at}$$

$x = 0$, find $f(0)$. 1

(c) Integrating factor of the differential equation
 $\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$ is

- (i) $\sin x$
 (ii) $\sec x$
 (iii) $\tan x$
 (iv) $\cos x$

(d) Solve the inequality

$3x - 5 \leq 5x - 3$ where x is a real number

(e) A and B are two events such that $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$. Write the correct option from the following

- (i) $A \subset B$
 (ii) $A = B$
 (iii) $A \cap B = \phi$
 (iv) $P(A) = P(B)$

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि $f(x) = e^x$, $g(x) = \log e^x$ तो $f \circ g$ तथा $g \circ f$ ज्ञात कीजिए ।

(ख) अगर $y = (x-1) \log(x-1) - (x+1) \log(x+1)$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(ग) दर्शाइए कि बिन्दु $2\hat{i}, -\hat{i} - 4\hat{j}, -\hat{i} + 4\hat{j}$ एक समद्विबाहु त्रिभुज बनाते हैं ।

(घ) A किसी लक्ष्य को 5 प्रयास में से 4 बार, B उसे 4 प्रयास में से 3 बार तथा C उसे 3 प्रयास में से 2 बार भेद सकता है । लक्ष्य के भेदन की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

3. Attempt all the parts of the following :

(a) Find $f \circ g$ and $g \circ f$ if $f(x) = e^x$, $g(x) = \log e^x$

(b) If $y = (x-1) \log(x-1) - (x+1) \log(x+1)$ then prove that $\frac{dy}{dx} = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(c) Show that points $2\hat{i}, -\hat{i} - 4\hat{j}, -\hat{i} + 4\hat{j}$ form an isosceles triangle.

(d) A can hit a target 4 times in 5 shots ; B 3 times in 4 shots ; and C 2 times in 3 shots. Find the probability that target will be hit.

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) अन्तराल $[-2, 2]$ पर फलन $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ के लिए रोले की प्रमेय सत्यापित कीजिए ।

(ख) उस सदिश को ज्ञात कीजिए जिसका तीन सदिशों $3\hat{i} - 5\hat{k}$, $2\hat{i} + 7\hat{j}$ तथा $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ के साथ अदिश गुणन क्रमशः $-1, 6$ तथा 5 है ।

(ग) सदिश $7\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ का सदिश $2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए। 2

(घ) दिया है कि घटनाएँ A तथा B ऐसी हैं कि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = p$ तो p का मान ज्ञात कीजिए अगर वे

(i) परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं। 1

(ii) स्वतंत्र घटनाएँ हैं। 1

4. Attempt all the parts of the following :

(a) Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ on $[-2, 2]$. 2

(b) Scalar product of a vector with vectors $3\hat{i} - 5\hat{k}$, $2\hat{i} + 7\hat{j}$ and $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ are respectively -1, 6 and 5. Find the vector. 2

(c) Find projection of the vector $7\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ on the vector $2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$. 2

(d) Given the events A and B are such that $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ and $P(B) = p$, find p if they are

(i) mutually exclusive events. 1

(ii) independent events. 1

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4} \quad 5$$

(ख) बिना प्रसार के, सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} b^2 c^2 & bc & b+c \\ c^2 a^2 & ca & c+a \\ a^2 b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0 \quad 5$$

(ग) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x \log \sin x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(घ) रेखाओं जिनके सदिश समीकरण

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \text{ तथा}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu (4\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}) \text{ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।} \quad 5$$

(ङ) एक घन का आयतन $7 \text{ cm}^3/\text{sec}$ की दर से बढ़ रहा है। उसका सम्पूर्ण पृष्ठ कितनी तेजी से बढ़ रहा है जबकि घन की एक भुजा 12 से.मी. है? 5

(च) अगर $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

$$\text{सिद्ध कीजिए कि } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad 5$$

5. Attempt any five parts of the following :

(a) Prove that

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4} \quad 5$$

(b) Without expanding, show that

$$\begin{vmatrix} b^2 c^2 & bc & b+c \\ c^2 a^2 & ca & c+a \\ a^2 b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0 \quad 5$$

(c) Evaluate $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x \log \sin x \, dx$ 5

(d) Find shortest distance between the lines whose vector equations are

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu (4\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}). \quad 5$$

(e) The volume of a cube is increasing at the rate of $7 \text{ cm}^3/\text{sec}$. How fast is the total surface area increasing when length of an edge is 12 cm ? 5

(f) If $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ prove that $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है। 5

(ख) $y = \sqrt{x}$ तथा $y = x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(ग) बिन्दुओं $A(2, 2, -1)$, $B(3, 4, 2)$, $C(7, 0, 6)$ से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। उसका कार्तीय समीकरण भी ज्ञात कीजिए। 5

(घ) निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 50x + 15y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए : 5

$$5x + y \leq 100,$$

$$x + y \leq 60,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0$$

(ङ) प्रवणता 2 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y + \frac{2}{x-3} = 0$ को स्पर्श करती हैं। 5

(च) एक थैली में 4 सफेद तथा 6 लाल गेंद हैं, उस थैली से यादृच्छिक 4 गेंद निकाली जाती हैं। सफेद गेंद आने की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। 5

6. Attempt any five parts of the following :

(a) Show that semi-vertical angle of a cone of maximum volume and given slant height is $\tan^{-1} \sqrt{2}$ 5

(b) Find the area of the region bounded by $y = \sqrt{x}$ and $y = x$. 5

(c) Find the vector equation of the plane passing through the points A(2, 2, -1), B(3, 4, 2), C(7, 0, 6). Also find Cartesian equation of the plane. 5

(d) Maximize $Z = 30x + 15y$ subject to the constraints :

$$5x + y \leq 100,$$

$$x + y \leq 60,$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$
 5

(e) Find the equation of all the lines of gradient 2, which touches the curve $y + \frac{2}{x-3} = 0$ 5

(f) An urn contains 4 white and 6 red balls. Four balls are drawn at random from the urn. Find the probability distribution of the numbers of white balls. 5

7. निम्नलिखित में से एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) प्रारंभिक रूपान्तरण के प्रयोग से निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$
 8

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2z = 5$$

$3x + y + z = 12$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

7. Attempt any one part of the following :

(a) Find inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \text{ by using elementary}$$

operations. 8

(b) Solve the following system of equations by matrix method.

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2z = 5$$

$$3x + y + z = 12$$
 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :
(क) $y e^y dx = (y^3 + 2x e^y) dy$, $y(0) = 1$ को हल कीजिए । 8

(ख) अवकल समीकरण
 $(x - y) \frac{dy}{dx} = (x + 2y)$ का हल ज्ञात कीजिए । 8

8. Attempt any **one** part of the following :
(a) Solve $y e^y dx = (y^3 + 2x e^y) dy$, $y(0) = 1$. 8

(b) Solve the differential equation
 $(x - y) \frac{dy}{dx} = (x + 2y)$. 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :
(क) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ 8

(ख) $\int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin x + \cos x}$ का मान ज्ञात कीजिए । 8

9. Attempt any **one** part of the following :
(a) Prove that $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ 8

(b) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin x + \cos x}$ 8